Chapitre 09 : Probabilités 2

HEI 2 - 2015/2016 - A. RIDARD

Prérequis :

- Probabilités 1

Table des matières

I. Couple de variables aléatoires

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$.
On considère $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a. discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \left\{y_j | j \in J\right\}$ avec I, J finis ou dénombrables.

1. Loi conjointe

Définition (Couple de v.a.)**.**

On appelle couple défini par les v.a. X et Y la variable aléatoire :

$$Z = (X,Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & Z(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}$$

Remarque. $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Exemple. On choisit une carte à l'intérieur d'un jeu de 32 cartes. On désigne par X la hauteur et Y la couleur de cette carte. La variable aléatoire $Z = (X, Y)$ détermine alors parfaitement la carte tirée.

Définition (Loi conjointe)**.**

On appelle loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y la loi du couple $Z = (X, Y)$.

Remarque. Elle est entièrement déterminée par la connaissance de $\mathrm{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$ pour tout $\left(x_i, y_j\right) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Dans le cas fini, on peut exploiter un tableau pour visualiser une loi conjointe.

Exemple (Cas fini)**.** Une urne comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette urne et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0

Evidemment, la somme des cases vaut toujours 1, mais que vaut ici $Z(\Omega)$?

Exemple (Cas dénombrable)**.** On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $\mathrm{P}\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = \frac{a}{i!j!}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $I = J = \mathbb{N}$.
Déterminer la valeur de a.

2. Lois marginales

Définition (Lois marginales)**.**

Les lois des deux variables aléatoires X et Y sont appelées les lois marginales de la variable $Z = (X, Y)$.

Propriété (Détermination des lois marginales)**.**

La loi de $Z = (X, Y)$ détermine entièrement ses lois marginales :

- $\forall i \in I,\ \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathrm{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$
- $\forall j \in J,\ \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

Exemple (Cas fini - suite)**.** Une urne comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette urne et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	P_Y
$Y = 0$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	
P_X				

⚠ Les lois marginales ne suffisent pas à déterminer la loi conjointe.

	$X=0$	$X=1$	P_Y
$Y=0$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$Y=1$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

	$X=0$	$X=1$	P_Y
$Y=0$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$Y=1$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Exemple (Cas dénombrable - suite)**.** On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\frac{e^{-2}}{i!j!}$ où $I=J=\mathbb{N}$. Reconnaître les lois marginales de X et Y.

3. Lois conditionnelles

Définition (Lois conditionnelles)**.**

On appelle loi conditionnelle de Y sachant $X=x_i$, la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(.|X=x_i)$.

Remarque. Elle est entièrement déterminée par la connaissance de $\mathrm{P}\big(Y=y_i|X=x_i\big)$ pour tout $y_i\in Y(\Omega)$.

Exemple (Cas fini - suite)**.** Une urne comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette urne et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$\mathrm{P}(Y=0\vert X=x_i)$			
$\mathrm{P}(Y=1\vert X=x_i)$			

Exemple. On suppose que $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$ et que la loi de Y sachant $X=n$ est binomiale de paramètres n et $p\in]0,1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).
2. Reconnaître la loi de Y.

4. Variables aléatoires indépendantes

Définition (v.a. indépendantes)**.**

Les v.a. X et Y sont indépendantes si pour tout $(i,j)\in I\times J$, on a :

$$\mathrm{P}\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)=\mathrm{P}(X=x_i)\mathrm{P}(Y=y_j)$$

Exemple (Cas fini - suite et fin)**.** Une urne comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette urne et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.
Les v.a. sont-elles indépendantes ?

Exemple (Cas dénombrable - suite et fin)**.** On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\frac{e^{-2}}{i!j!}$ où $I=J=\mathbb{N}$. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

II. Espérance

1. Définition et existence

Définition (Espérance)**.**

On dit que X admet une espérance si la série numérique $[x_n P(X = x_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument.

Dans ce cas, son espérance est définie par $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

Remarque. Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \dots, x_n$, alors son espérance existe et vaut $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$.

Exemples.
- Si X vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, alors $E(X)$ existe et vaut 1 [1].
- Si X vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, alors X n'admet pas d'espérance.
- Si X est une v.a. constante égale à c, alors $E(X)$ existe et vaut c [2]

Propriété (Conditions d'existence)**.**

- Si $|X| \leq Y$ et si Y admet une espérance, alors X aussi.
  En particulier, une v.a. bornée admet une espérance.
- Si X et Y admettent une espérance, alors λX (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et $X + Y$ aussi. Si de plus X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance.

Définition (Variable centrée)**.**

Une variable est dite centrée si son espérance est nulle.

Propriété (Variable centrée positive)**.**

Si X est centrée et positive, alors X est presque sûrement nulle autrement dit $P(X = 0) = 1$.

2. Lois usuelles

Propriété (Espérances des lois usuelles)**.**

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

[1]. On pourra considérer la série entière dérivée $\left[nx^{n-1}\right]_{n\geq 1}$.
[2]. Ce résultat est encore vrai si la variable est presque sûrement constante égale à c autrement dit $P(X = c) = 1$.

Dans la suite du I., les v.a. X et Y admettent une espérance.

3. Propriétés

Propriété (Linéarité)**.**

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Remarque. $Z = X - E(X)$ est centrée.

Exemple. Retrouver l'espérance de $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$

Propriété (Théorème du transfert)**.**

Soit f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.
La v.a. $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\left[f(x_n)P(X = x_n)\right]$ converge absolument.
Dans ce cas, $E\left(f(X)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.

Exemple. Sous réserve d'existence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$E\left(X^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n) \quad \text{et} \quad E\left(e^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{x_n} P(X = x_n)$$

Propriété (Inégalité de Markov)**.**

Si X est positive, alors pour tout $a \geq 0$, $\quad aP(X \geq a) \leq E(X)$.

Propriété (Espérance d'un produit)**.**

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
où $E(XY) = \sum\limits_{z \in (XY)(\Omega)} zP(XY = z) = \sum\limits_{z \in (XY)(\Omega)} z \left(\sum\limits_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), xy = z} P(X = x, Y = y) \right)$

⚠ La réciproque est fausse

III. Variance et covariance

1. Moments

Définition (Moment d'ordre k)**.**

On dit que X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si la v.a. X^k admet une espérance.
Dans ce cas, le moment d'ordre k de X est défini par $m_k = E\left(X^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n)$.

Exemples.
- X admet un moment d'ordre 0 et $m_0 = 1$
- X admet un moment d'ordre 1 si et seulement si X admet une espérance. Dans ce cas, $m_1 = E(X)$
- Si X admet un moment d'ordre 2, alors elle admet un moment d'ordre 1 [3]
- Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, alors XY admet un moment d'ordre 1 [4]

Remarque. L'ensemble des v.a. admettant un moment d'ordre 2 est un sev de l'ev des v.a. admettant un moment d'ordre 1.

Dans la suite du II., les v.a. considérées admettent un moment d'ordre 2.

2. Variance et écart-type

Définition (Variance et écart-type)**.**

On appelle variance de X le réel (positif) défini par $V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big)$.
On définit aussi son écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque. La variance et l'écart-type permettent de mesurer la dispersion de X autour de sa moyenne.
Si X se comprend avec une unité, l'espérance et l'écart-type s'expriment avec la même unité.

Propriété (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Pour tout $\epsilon > 0$, $P\big(|X - E(X)| \geq \epsilon\big) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$.

Propriété (Formule de Huygens)**.**

$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

Propriété (Changement affine)**.**

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Définition (Variable réduite)**.**

Une variable est dite réduite si sa variance est égale à 1.

Remarque. $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

[3]. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1 + x^2$
[4]. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$

Propriété (lois usuelles)**.**

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X) = np(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors $V(X) = \lambda$.

3. Covariance

Définition (Covariance)**.**

On appelle covariance de X et Y le réel défini par $Cov(X,Y) = E\Big(\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big)$.

Remarque. $Cov(X,X) = V(X)$

Propriété (Calcul de la covariance)**.**

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Remarques.

- Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$.

  ⚠ La réciproque est fausse.
- La covariance est une forme bilinéaire symétrique

4. Variance d'une somme

Propriété (Variance d'une somme)**.**

- $V(X+Y) = V(X) + 2Cov(X,Y) + V(Y)$
- $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov\left(X_i, X_j\right)$
- Si les $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes 2 à 2, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Exemple. Retrouver la variance de $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$